

Jahresbericht

des

Königl. Gymnasiums

zu

Rastenburg,

Michaelis 1853,

womit

zu der öffentlichen Prüfung und den Declamationsübungen

der Schüler

Freitag, den 30. September

Vormittags von 8½ und Nachmittags von 2½ Uhr an,

ergebenst einladet

der

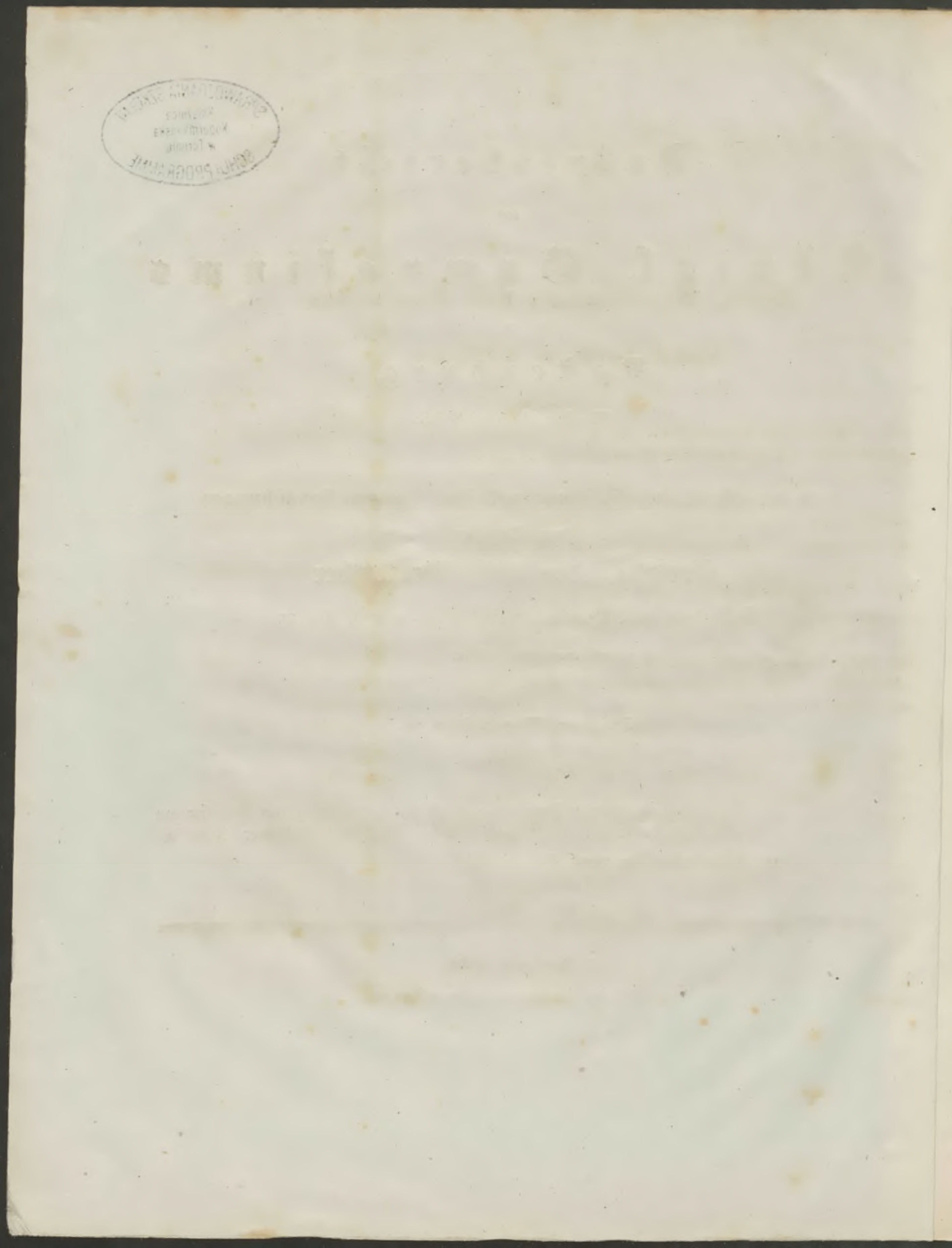
Director **Techow.**

Inhalt: 1) Schluß der im vorigen Programm gelieferten Abhandlung über Rectification und Quadratur der sphärischen Ellipse vom Gymnasiallehrer Jänsch.

2) Schulnachrichten vom Director.

Rastenburg, 1853.

Druck der Haberland'schen Officin.



Ueber Rectification und Quadratur der sphärischen Ellipse.*)

(Fortsetzung.)

§. 11. In dem Ausdrucke für die Rectification war der Modul der Funktonen ausgedrückt durch den Cosinus eines Bogens e', dessen nähere Bestimmung ich mir vorbehielt; sie möge hier folgen.

Die beiden Axen der betrachteten Ellipse sind α und β. Ich denke mir nun eine andere Ellipse verzeichnet mit den Axen $90 - \alpha$ und $90 - \beta$, in der, da $\beta < \alpha$ ist, $90 - \beta$ die große Axe sein wird. Da nun die Excentricität der sphärischen Ellipse immer gleich ist dem Cosinus der großen Axe dividirt durch den Cosinus der kleinen Axe, so wird die Excentricität dieser sphärischen Ellipse bestimmt werden durch die Gleichung

$$\cos e' = \frac{\cos (90 - \beta)}{\cos (90 - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

und dieses ist der in jener Funktion vorkommende Modul; e' ist also die Exentricität der sphärischen Ellipse, deren Axen sich zu denen der ursprünglichen zu 90 ergänzen, welche Ellipse man die Polaire zu der vorigen genannt hat. Dieser Name hat in folgendem seinen Grund.

Gehe ich von der Vorstellung aus, daß die sphärische Ellipse die Durchschnittscurve einer Kugel und eines Kegels ist, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so erhalte ich die jetzt in Rede stehende sphärische Ellipse als Durchschnitt der Kugel und eines Kegels, dessen Spitze ebenfalls im Mittelpunkt der Kugel liegt, für den aber der im ersten Kegel mit φ bezeichnete Winkel **FAM**, den die Seite **AM** mit seiner z Axe **AP** bildete, $FAM' = 90 - \varphi$ wird, so daß also die den beiden correspondirenden Punkten **M** und **M'** zugehörigen Radien **AM** und **AM'** senkrecht auf einander stehen. Da nun die Radien der Kugel die Normalen der sphärischen Ellipse sind, so haben diese beiden Ellipsen die Eigenschaft mit den zu einander polairen Figuren gemein, daß ihre Normalen senkrecht auf einander stehen. Es ist also die zweite sphärische Ellipse die Polaire zu der zuerst besprochenen und umgekehrt.

---

*) In Betreff der Figuren verweise ich auf das vorjährige Programm.

§. 12. Aufgabe. Reduction der Rectification der sphärischen Ellipse auf die Quadratur der Polairen derselben.

Auflösung. Der Ausdruck für die Quadratur der sphärischen Ellipse war:

$$F = 2\pi - 4\,(E^I \sin e - F' \sin e)\; F\,(\cos \tfrac{\pi}{2} - \beta) - F' \sin E\,(\cos e,\ \tfrac{\pi}{2} - \beta)$$

für die Rectification:

$$S = 4\,(E^I \sin e' - F^I \sin e')\; F\,(\cos e,\ \alpha) + 4\; F^I \sin e',\ E\,(\cos e,'\ \alpha).$$

Der Modul der elliptischen Funktionen dieses 2ten Ausdrucks ist der sin der Excentricität der Polaire, die Amplitude ist die große Axe der ursprünglichen, wofür ich auch sagen kann, der Sinus der Amplitude ist gleich dem Cosinus der kleinen Axe der Polairen, da diese $90 - \alpha$ ist. Um daher die Amplitude der Polairen zu finden, darf ich nur für die Excentricität der Polairen die Exentricität der ursprünglichen, und für die kleine Axe der Polairen die kleine Axe der ursprünglichen setzen, so daß also e für e′ gesetzt wird und $90 - \beta$ für α, da $\sin am = \cos \beta$ sein soll. Es wird alsdann der Umfang der Polairen

$$S' = 4\,(E^I \sin e - F^I \sin e)\; F \cos e,\ \tfrac{\pi}{2} - \beta + 4\; F^I \sin e\; E\,(\cos e,\ \tfrac{\pi}{2} - \beta.)$$

Dieses ist aber die in dem Ausdruck für den Inhalt der ursprünglichen von 2π abgezogenen Größe, woraus folgt, daß

$$F = 2\pi - S'$$

ist, d. h. der Inhalt der sphärischen Ellipse ist gleich 2π weniger dem Umfang der Polairen derselben.

Dieses ist ein Satz, der allgemein für jede 2 zu einander polaire Figuren gilt, wie Herr Professor Gauß bewiesen hat.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der concentrischen sphärischen Ellipsen über.

§. 13. Erklärung. Concentrische sphärische Ellipsen nennt man solche, die entweder denselben Mittelpunkt haben, oder deren Mittelpunkte um 90° von einander entfernt sind, welche Entfernung jedoch auf der großen Axe gemessen wird. Aus dieser Erklärung geht hervor, daß 2 Ellipsen der ersten Art sich nur dann schneiden werden, wenn die große Axe der ersten kleiner ist, als die kleine Axe der zweiten. Zwei Ellipsen der zweiten Art werden sich immer dann schneiden, wenn die Summe ihrer großen Axen größer als $\frac{\pi}{2}$ ist.

§. 14. Aufgabe. Das Stück, welches zwei concentrische sphärische Ellipsen gemein haben, ist zu bestimmen, und diejenigen Fälle sind hervor zu heben, in welchen sich der Ausdruck für das obige Stück auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung reducirt.

Ich werde zuerst 2 Ellipsen der zweiten Art, deren Mittelpunkte um $\frac{\pi}{2}$ von einander entfernt sind, betrachten.

Auflösung. Die Gleichungen der Projectionen in der xy Ebene der beiden sphärischen Ellipsen erhalte ich, wenn ich aus den Gleichungen der ihnen zugehörigen Kegel und der Gleichung der Kugel z eliminire. Wenn die Gleichung des einen Kegels

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

ist, wie ich sie früher aufgestellt habe, so wird die Gleichung des andern Kegels, bezogen auf

dasselbe Coordinatensystem, sein: $z^2 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a_{,}^2}$ oder

$$\frac{x^2}{a_{,}^2} - \frac{y^2}{b_{,}^2} = z^2;$$

demnach erhalte ich als Gleichungen der Projectionen, da die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ist:

$$x^2 \frac{(1 + a^2)}{a^2} + y^2 \frac{(1 + b^2)}{b^2} = 1 \text{ und}$$

$$x^2 \frac{(1 + a_{,}^2)}{a_{,}^2} - y^2 \frac{(1 + b^2)}{b^2} = 1.$$

Die eine Projection ist also eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, die erste sei **ADBC**, ihre große Halbaxe $FB = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$, ihre kleine Halbaxe $FC = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$, die zweite sei **C'A'D**, ihre große Halbaxe $FA' = \frac{a_{,}}{\sqrt{1 + a_{,}^2}}$, ihre kleine Halbaxe $\frac{b_{,}}{\sqrt{1 - b_{,}^2}}$, denke ich mir nun eine zweite Ellipse und eine zweite Hyperbel mit den Axen **A** und **B** beschrieben aus dem Punkte **F**, in denen die Axen **A** und **B** so bestimmt werden, daß für die Abscisse der Hyperbel $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ $y = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ wird, und für die Abscisse der Ellipse $x = \frac{a_{,}}{\sqrt{1 + a_{,}^2}}$ $y = \frac{b_{,}}{\sqrt{1 - b_{,}^2}}$ wird, so erhalte ich für die Bestimmung des **A** und des **B** folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{a_{,}^2}{(1 + a_{,}^2)\,A^2} + \frac{b_{,}^2}{(1 + b_{,}^2)\,B^2} = 1 \text{ und}$$

$$\frac{a^2}{(1 + a^2)\,A^2} - \frac{b^2}{(1 + b^2)\,B^2} = 1,$$

woraus folgt:

$$A^2 = \frac{a^2\, b_{,}^2\, (1 + a_{,}^2)\,(1 + b^2) + a_{,}^2\, b^2\, (1 + a^2)\,(1 - b_{,}^2)}{(b^2 + b_{,}^2)\,(1 + a^2)\,(1 + a_{,}^2)}$$

$$B^2 = \frac{a^2\, b_{,}^2\, (1 + a_{,})\,(1 + b^2) + a_{,}^2\, b^2\, (1 + a^2)\,(1 - b_{,}^2)}{(a^2 - a_{,}^2)\,(1 + b^2)\,(1 - b_{,}^2).}$$

Die Gleichungen dieser beiden Hilfscurven sind also:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

$$\text{und } \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Ich beschreibe mir jetzt wieder mit den einander zugehörigen Coorginaten der Hyperbel

als Axen Ellipsen um den Punkt F, lasse aber x nur variiren von $x = A$ bis $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$,
so daß für die Werthe von $x = A$ und $y = o$
die Ellipse mit der Axe FE, für die Werthe von

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ und } y = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

diese Ellipse mit der Ellipse ADBC zusammenfällt. Dasselbe thue ich mit den einander zugehörigen Coordinaten der Ellipse, d. h. ich beschreibe mit ihnen als Axen Hyperbeln. Hier lasse ich jedoch x variiren von $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ bis $x = A$, so daß ich also für die Werthe von

$$x = \frac{a_,}{\sqrt{1 + a_,^2}} \text{ und } y = \frac{b_,}{\sqrt{1 + b_,^2}}$$

die Hyperbel C'A'D' erhalte, für die Werthe von $x = A$ und $y = o$ die Linie EB. Auf diese Weise ist die Projection des zu bestimmenden Stücks A'GBH in Vierecke getheilt, die von zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln begränzt werden.

Der Ausdruck für eine Kugelfläche ist bekanntlich

$$f = \iint \frac{d\,x\,d\,y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

setze ich jetzt für den vorliegenden Fall

$$x^2 = \left\{ \frac{A^2(1 + B^2)}{B^2} - \frac{A^2}{B^2} \sin^2\varphi \right\} \sin^2\psi$$
$$y = \cos\varphi \cos\psi,$$

wo die Winkel φ und ψ dieselbe Deutung in der mit A und B als Axen beschriebenen Hyperbel und Ellipse haben, wie die Winkel φ und ψ in der Hyperbel und Ellipse hatten, die ich mir als Hilfscurven bei der Quadratur der ganzen sphärischen Ellipse construirte; substituire ich diese Werthe von x und y in das obige Doppelintegral, so geht es, da

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi} = - \frac{\frac{A^2}{B^2} \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi}{\sqrt{A^2\left(\frac{1 + B^2}{B^2}\right) - \frac{A^2}{B^2}\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{d\,x}{d\,\psi} = \left\{ A^2\left(\frac{1 + B^2}{B^2}\right) - \frac{A^2}{B^2} \sin^2\varphi \right\}$$

$$\frac{d\,y}{d\,\varphi} = - \sin\varphi \cos\psi$$

$$\frac{d\,y}{d\,\psi} = - \cos\varphi \sin\psi$$

ist, über in folgendes Doppelintegral:

$$\iint \frac{d\varphi\ d\psi \sin\varphi \left[A^2 \cos^2\varphi + A^2 B^2 \cos^2\psi \right]}{\sqrt{A^2 B^2 + A^2 \cos^2\varphi} \sqrt{B^2 \sin^2\varphi - (A^2 - B^2) \cos^2\varphi \sin^2\psi - A^2 B^2 \sin^2\psi}}$$

dieses Doppelintegral wird sich nur dann auf elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung zurückführen lassen, wenn die Variabeln φ und ψ, die unter dem zweiten Wurzelzeichen noch mit einander verbunden sind, sich trennen lassen, was nur dann der Fall ist, wenn

$$B^2 = \frac{A^2}{1 - A^2}$$

ist, denn alsdann wird

$$\sqrt{B^2 \sin^2\varphi - (A^2 - B^2) \cos^2\varphi \sin^2\psi - A^2 B^2 \sin^2\psi}$$
$$= \frac{A \sin\varphi}{\sqrt{1 - A^2}} \sqrt{1 - A^2 \sin^2\psi}$$

und ich erhalte für obiges Integral

$$\iint \frac{d\varphi\ d\psi \left[(1 - A^2) \cos^2\varphi + A^2 \cos^2\psi \right]}{\sqrt{A^2 + (1 - A^2) \cos^2\varphi} \sqrt{1 - A^2 \sin^2\psi}}$$

$$\text{oder} \iint \frac{d\varphi\ d\psi \left[1 - (1 - A^2) \sin^2\varphi - A^2 \sin^2\psi \right]}{\sqrt{1 - (1 - A^2) \sin^2\varphi} \sqrt{1 - A^2 \sin^2\psi}}$$

und dieses ist

$$= \iint \frac{d\varphi\ d\psi \sqrt{1 - (1 - A^2) \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2\psi}}$$
$$+ \iint \frac{d\varphi\ d\psi \sqrt{1 - A^2 \sin^2\psi}}{\sqrt{1 - (1 - A^2 \sin^2\varphi}}$$
$$- \iint \frac{d\varphi\ d\psi}{\sqrt{1 + A^2 \sin^2\psi} \sqrt{1 - (1 - A^2) \sin^2\varphi}}.$$

Die Integration dieser drei Doppelintegrale giebt mir

$$f = E\left(\sqrt{1 - A^2}\right) \varphi\, F(A, \psi) + F\left(\sqrt{1 - A^2}\right) \varphi)\, E(A, \psi) - F\left(\sqrt{1 - A^2}\right) \varphi)\, F(A, \psi.)$$

Die Grenzen für φ sind dieselben, wie die für die Quadratur der ganzen Ellipse aufgestellten, nämlich von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \text{arc}\left(\cos - \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}\right)$, für ψ jedoch sind sie $\psi = \frac{\pi}{2}$ bis ψ = dem Bogen, der dem Winkel zugehört, der dem Durchschnittspunkt der beiden sphärischen Ellipsen entspricht. Ich werde jetzt diesen Werth von ψ bestimmen. Die Gleichungen der Projectionen der sphärischen Ellipse waren

$$\frac{1+a^2}{a^2}\,x^2 + \frac{1+b^2}{b^2}\,y^2 = 1$$

und
$$\frac{1+a_{,}^2}{a_{,}^2}\,x^2 - \frac{1-b_{,}^2}{b_{,}^2} = 1$$

eliminire ich aus diesen beiden Gleichungen um die Abscisse des Durchschnittspunkts der Projectionen zu erhalten y, so wird

$$x^2 = \frac{a^2\,a_{,}^2\,(b^2+b_{,}^2)}{a^2\,b_{,}^2\,(1+a_{,}^2)\,(1+b^2) + a_{,}^2\,b^2\,(1+a^2)\,(1-b_{,}^2)}$$

Da nun die oben aufgestellte Bedingungsgleichung

$$B^2 = \frac{A^2}{1-A^2}$$

und

$$A^2 = \frac{a^2\,b_{,}^2\,(1+a_{,}^2)\,(1+b^2) + a_{,}^2\,b^2\,(1+a^2)\,(1-b_{,}^2)}{(b^2+b_{,}^2)\,(1+a^2)\,(1+a_{,}^2)}$$

$$B^2 = \frac{a^2\,b_{,}^2\,(1+a^2)\,(1+b^2) + a_{,}^2\,b^2\,(1+a^2)\,(1-b_{,}^2)}{(a^2-a_{,}^2)\,(1+b^2)\,(1-b_{,}^2)}$$

war, woraus

$$b_{,}^2 = \frac{a^2 - a_{,}^2 - b^2\,(1+a_{,}^2)}{1+a^2} \quad \text{und} \quad A^2 = \frac{a^2-b^2}{1+a^2}$$

folgt, so wird, wenn ich diesen Werth von $b_{,}^2$ in die Gleichung für x substituire

$$x^2 = \frac{a^2\,a_{,}^2}{(1+a_{,}^2)\,(a^2-b^2)}$$

Der Werth von ψ endlich wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{a^2}{1+a^2}\,\sin^2\psi = x^2;$$

folglich wird

$$\sin^2\psi = \frac{a_{,}^2\,(1+a^2)}{(a^2-b^2)\,(1+a_{,}^2)}$$

oder, wenn ich $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$ $a_{,} = \operatorname{tg} x$, setze und bedenke, daß $\cos e = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ist,

$$\sin^2\psi = \frac{\sin^2\alpha_{,}}{\sin^2 e}.$$

Es könnte nun zwar gesagt werden, daß ψ nach dieser Gleichung imaginär werden könne, jedoch dagegen spricht obige Bedingungsgleichung, denn nach diesen Substitutionen wird sie

$$b_{,}^2 = \cos^2 e\;[\operatorname{tg}^2 e = \operatorname{tg}^2\alpha_{,}]$$

und es ist also ψ nur dann imaginär, wenn $b_{,}$ imaginär ist, folglich ist $\alpha_{,}$ immer kleiner als e, so lange dieser zweite Kegel ein reeller ist. Substituire ich diese Grenzen in den oben gefundenen Werth für f, so erhalte ich als endliches Resultat, da $A^2 = \sin e$ ist,

$$f = \left[E\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right) - E^I \cos e\right]\left[F \sin e, \psi_,) - F_I \sin e\right]$$
$$+ \left[F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right) F_I \cos e\right]\left[E \sin e, \psi) - E_I \sin e\right]$$
$$- \left[F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right) - F^I \cos e\right]\left[F \sin e, \psi) - E^I \sin e\right]$$

wo ψ durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\sin {}^2\psi = \frac{\sin {}^2\alpha}{\sin {}^2 e};$$

da die Kegel sich oben nach beiden Richtungen der z Axen ins Unendliche erstrecken, so schneiden sich diese beiden Kegel 4 mal auf der Kugeloberfläche, und da der hier aufgestellte Ausdruck für f nur die Hälfte jedes gemeinschaftlichen Stücks ist, so muß ich diese Größe mit 8 multipliciren, so daß also

$$F = 8\left[E^I \cos e - E\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]\left[F^I \sin e - F(\sin e, \psi)\right]$$
$$+ 8\left[F^I \cos e - F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]\left[E^I \sin e - E(\sin e, \psi)\right]$$
$$- 8\left[F^I \cos e - F\left(\cos e, \frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]\left[F^I \sin e - F(\sin e, \psi_,)\right]$$

wird.

Aus diesem Ausdruck muß ich den Inhalt der ganzen sphärischen Ellipse erhalten, wenn ich $\alpha_, = o$ setze, woraus $\psi = o$ folgt, und das geschieht auch in der That, denn alsdann wird

$$F(\sin e, o) = E(\sin e, o) = o.$$

§. 15. Anmerkung. Die Gleichungen der beiden Kegel, die zu den hier betrachteten sphärischen Ellipsen gehörten, waren

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

$$\text{und } \frac{x^2}{a_,^2} - \frac{y^2}{b_,^2} = z^2;$$

folglich sind die Gleichungen der beiden sphärischen Ellipsen aus ihren Mittelpunkten

$$\frac{\operatorname{tg} {}^2 x}{\operatorname{tg} {}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg} {}^2 y}{\operatorname{tg} {}^2\beta} = 1$$

$$\text{und } \frac{\operatorname{tg} {}^2 z}{\operatorname{tg} {}^2\alpha_,} + \frac{\operatorname{tg} {}^2 y}{\operatorname{tg} {}^2\gamma} = 1,$$

wo $\operatorname{tg} {}^2\gamma = \operatorname{tg} {}^2\alpha, \operatorname{tg} {}^2\beta_,$ ist. Ihre Excentricitäten e und $e_,$ werden also durch die Gleichungen bestimmt

$$\cos e = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$\text{und } \cos e_, = \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}$$

da nun $\operatorname{tg} {}^2\beta_, = \cos {}^2 e\,(\operatorname{tg} {}^2 e - \operatorname{tg} {}^2\alpha_,)$ war, so wird

$$\cos e_, = \sin e$$

d. h. $\quad e_, = 90 - e$

folglich werde ich das zwei so gelegenen sphärischen Ellipsen gemeinschaftliche Stück nur dann durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung bestimmen können, wenn ihre Excentricitäten sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen.

§. 16. Aufgabe. Das Stück zu bestimmen, daß zwei concentrische sphärische Ellipsen gemein haben, die denselben Mittelpunkt haben und zu untersuchen, wenn es sich durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung ausdrücken läßt.

Auflösung. Wenn die Gleichungen der den beiden sphärischen Ellipsen zugehörigen Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = z^2$$

$$\text{und } \frac{x^2}{a_{,}^2} + \frac{y^2}{b_{,}^2} = z^2$$

sind, so sind die Gleichungen, der diesen sphärischen Ellipsen in der xy Ebene entsprechenden Projectionen **ABCD** und **A'B'C'D'**

$$1. \ \frac{1 + a^2}{a^2} x^2 + \frac{1 + b^2}{b^2} x^2 = 1$$

$$\text{und } 2. \ \frac{1 + a_{,}^2}{a_{,}^2} x^2 + \frac{1 + b_{,}^2}{b_{,}^2} y^2 = 1$$

oder, wenn ich in der zweiten Gleichung

$$b_{,}^2 = - b^2_2$$

setze:

$$3. \ \frac{1 + a_{,}^2}{a_{,}^2} x^2 - \frac{1 - b^2_2}{b^2_2} y^2 = 1.$$

Diese Substitution sagt nichts anders als ich betrachte die Ellipse **A'B'C'D'** wie eine Hyperbel, deren eine Axe imaginär ist. Da die Gleichungen der Projectionen der sphärischen Ellipsen 1 und 3 ganz dieselben sind, wie die für die Projectionen zweier sphärischen Ellipsen, deren Mittelpunkte um $\frac{\pi}{2}$ von einander entfernt sind, gefundenen, so werde ich das diesen sphärischen Ellipsen gemeinschaftliche Stück auf dieselbe Weise bestimmen, wie ich es bei jenem that. Ich werde also wieder zur Transformation des Doppelintegrals

$$\iint \frac{d\,x\;d\,y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

durch das dieses Stück ausgedrückt ist,

$$x^2 = [1 + B^2 - A^2 \sin{}^2\varphi]\ \frac{A^2}{B^2}\ \sin{}^2\psi$$

$$y = \cos\varphi\ \cos\psi$$

setzen, wo **A** und **B** wieder wie vorher bestimmt werden. Sie sind nämlich die Axen einer Ellipse und einer Hyperbel, in denen respective für $x = \frac{a_{,}}{\sqrt{1 + a_{,}^2}}$ und $x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$

$y = \frac{b^2}{\sqrt{1 - b^2_2}}$ und $y = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ wird, so daß also zwischen A und B die Gleichungen gelten:

$$\frac{a_,^2}{(1 + a_,^2) A^2} + \frac{b^2_2}{(1 + b^2_2) B^2} = 1$$

und $$\frac{a^2}{(1 + a^2) A^2} - \frac{b^2}{(1 + b^2) B^2} = 1;$$

woraus folgt:

$$A^2 = \frac{a_,^2 b^2 (1 + a^2)(1 - b^2_2) + a^2 b^2_2 (1 + a_,^2)(1 + b_,^2)}{(b^2 + b^2_2)(1 + a^2)(1 + a_,^2)}$$

$$B^2 = \frac{a_,^2 b^2 (1 + a_,)(1 - b^2_2) + a^2 b^2_2 (1 + a_,^2)(1 + b^2)}{(a^2 - a_,^2)(1 + b^2)(1 - b^2_2)};$$

φ und ψ sind wieder die Winkel, deren Werthe den Gleichungen der Hyperbel und der Ellipse genügen, wenn ich in der Gleichung der Hyperbel

$$y = \cos \varphi$$

$$x^2 = \frac{A^2}{B^2} (1 + B^2 - A^2 \sin {}^2\varphi)$$

setze und diese Werthe von x und y als Axen einer Ellipse betrachte, in deren Gleichung

$$\frac{x^2}{[1 + B^2 - A^2 \sin {}^2\varphi] \frac{A^2}{B^2}} + \frac{y^2}{\cos {}^2\varphi} = 1$$

ich alsdann

$$x^2 = \frac{A^2}{B^2} (1 + B^2 - A^2 \sin {}^2\varphi) \sin {}^2\psi$$

$$y^2 = \cos {}^2\varphi \cos {}^2\psi$$

setze. Ihre geometrische Deutung ist oben gegeben; führe ich nun diese Substitution für das Doppelintegral aus, so geht es in folgendes über:

$$\iint \frac{d\varphi \, d\psi \sin \varphi [A^2 \cos {}^2\varphi + A^2 B^2 \cos {}^2\psi]}{\sqrt{A^2 B^2 + A^2 \cos {}^2\varphi} \sqrt{B^2 \sin {}^2\varphi - (A^2 - B^2) \cos {}^2\varphi \sin {}^2\psi - A^2 B^2 \sin {}^2\psi}}.$$

Dieses Doppelintegral läßt sich wieder nur dann auf elliptische Funktionen der ersten und zweiten Gattung zurückführen, wenn die Gleichung stattfindet:

$$B^2 = \frac{A^2}{1 - A^2}$$

oder, nachdem für A^2 und B^2 ihre Werthe substituirt sind, wenn

$$b^2_2 = \frac{a^2 - a_,^2 - b^2 (1 + a_,^2)}{1 + a^2}$$

ist. Hieraus folgt, da

$$b^2_2 = - b_,^2, \; b_,^2 = \operatorname{tg} {}^2\beta_,, \; b^2 = \operatorname{tg} {}^2\beta, \; a^2 = \operatorname{tg} {}^2\alpha,$$

$$a_,^2 = \operatorname{tg} {}^2\alpha_, \text{ und endlich } \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \cos e$$

war, daß
$$\operatorname{tg}^2\beta_{,} = \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2\alpha_{,} - \operatorname{tg}^2 e]$$
und $$A^2 = \sin^2 e$$
sein muß. Demnach wird obiges Integral
$$\iint \frac{d\varphi\, d\psi\,[1 - \cos^2 e \sin^2\varphi - \sin^2 e \sin^2\psi]}{\sqrt{1 - \cos^2 e \sin^2\varphi}\,\sqrt{1 - \sin^2 e \sin^2\psi}}.$$
Die Grenzen für ψ sind $\frac{\pi}{2}$ und o, für φ $\frac{\pi}{2}$ und arc: $\cos = \frac{b_{,}^2}{1 + b_{,}^2}$, d. h. arc $\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}$.
Damit die zweite Grenze von φ nicht imaginär werde, muß $\alpha_{,}$ immer größer sein als e, was auch schon aus der Gleichung für $\beta_{,}$
$$\operatorname{tg}^2\beta_{,} = \cos^2 e\,(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 e)$$
hervorgeht, denn für $\alpha_{,} < e$ wird $\beta_{,}$ imaginär; es muß also $\alpha_{,}$ immer größer als e sein. Führe ich jetzt die Integration aus, so erhalte ich nach Substitution der Grenzen
$$f = F^I \sin e\,[E^I \cos e - E(\cos e, \psi)] + E_I \sin e\,[F^I \cos e - F(\cos e, \psi)]$$
$$- F^I \sin e\,[F^I \cos e - F(\cos e, \psi)];$$
wo ψ durch die Gleichung bestimmt ist:
$$\sin^2\psi = \frac{\cos^2\alpha_{,}}{\cos^2 e}.$$
Da nun nach früheren Beweisen
$$F^I \sin e\, E^I \cos e + F^I \cos e\, F^I \sin e - F^I \cos e\, F^I \sin e = \frac{\pi}{2}$$
ist, so wird
$$f = \frac{\pi}{2} - F^I \sin e\, E(\cos e, \psi) - (E^I \sin e - F^I \sin e)\, F(\cos e, \psi),$$
welcher Ausdruck aus den schon früher angeführten Gründen noch mit 8 multiplicirt werden muß, so daß
$$F = 4\pi - 8 F^I \sin e\, E(\cos e, \psi) - 8 (E_I \sin e - F^I \sin e)\, E(\cos e, \psi)$$
wird; und auf diese Weise ist das diesen sphärischen Ellipsen gemeinschaftliche Stück durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung bestimmt.

§. 17. Die Gleichungen der zu den beiden zuletzt betrachteten sphärischen Ellipsen gehörigen Kegel waren:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$
und $$\frac{x^2}{a_{,}^2} - \frac{y^2}{b_{,}^2} = z^2;$$
es sind also die Gleichungen der sphärischen Ellipsen:
$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1$$
und $$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\alpha_{,}} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2\beta_{,}} = 1,$$
und ihre Excentricitäten werden durch die Gleichungen bestimmt:

$$\cos e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \text{ und } \cos e_, = \frac{\cos \alpha_,}{\cos \beta_,}.$$

Da nun $\operatorname{tg}^2\beta_, = \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2\alpha_, - \operatorname{tg}^2 e_,]$ war, so wird

$$\cos e_, = \cos e$$

$$\text{d. h.} \quad e_, = e;$$

woraus folgt, daß das zweien um denselben Mittelpunkt gelegenen sphärischen Ellipsen gemeinschaftliche Stück nur dann durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung bestimmbar ist, wenn sie dieselbe Excentricität haben. Da aber

$$\operatorname{tg}^2\beta_, - \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 e]$$

wird, so wird $\beta_,$ seinen kleinsten Werth o erhalten, wenn $\alpha_, = e$, und seinen größten $\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha_, = \frac{\pi}{2}$ ist, in welchem Falle ich die Halbkugel erhalte, und $e = o$ ist. Für $\alpha_, = \alpha$ erhalte ich $\beta_, = \beta$, so daß $\beta_,$ von o bis β wächst, während $\alpha_,$ von e bis α wächst, woraus folgt, daß diese beiden sphärischen Ellipsen sich nie schneiden werden. Es wird also immer die eine in der andern liegen, und das solchen zwei Ellipsen gemeinschaftliche Stück ist immer gleich dem Inhalt der kleineren. In der That ist auch der im vorigen Paragraph aufgestellte Ausdruck gleich den im §. 10 angegebenen, der sich auf den Inhalt der ganzen Ellipse bezog, identisch. Zwei solche sphärische Ellipsen dürfen aber gar nicht dieselbe Excentricität haben, wenn das gemeinschaftliche Stück durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung ausgedrückt werden soll, und ich werde daher von dieser Bedingung in der Zukunft nur in so fern sprechen, als sie wieder bei Auflösung der Aufgabe zum Vorschein kommt, deren Zweck die Bestimmung des von sphärischen Ellipsen begränzten Stücks durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung ist.

§. 18. Die beiden zur Lösung der zuletzt vorgelegten Aufgaben erhaltenen Bedingungen waren:

1. Die Excentricität der beiden sphärischen Ellipsen müssen sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen, wenn ihre Mittelpunkte um $\frac{\pi}{2}$ von einander entfernt liegen und

2. Die Excentricitäten müssen dieselben sein, wenn sie denselben Mittelpunkt haben.

Ist daher im ersten Falle die Gleichung des einen Kegels

$$\frac{K^2\, x^2}{1 - K^2 \sin^2\alpha}\, x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{\sin^2\alpha},$$

woraus folgt, daß der cos der Excentricitäten der ihm gehörigen sphärischen Ellipse gleich K ist, so muß die Gleichung des zweiten Kegels sein:

$$\frac{x^2}{\sin^2\beta} - \frac{y^2}{\cos^2\beta} = \frac{K_,^2\, z^2}{1 - K_,^2 \sin^2\beta};$$

denn für die ihm zugehörige sphärische Ellipse ist der cos der Excentricität K', und da

$$K^2 + K_,^2 = 1,$$

also

$$\cos^2 e + \cos^2 e_, = 1$$

ist, so ist

$$e_, = 90 - e.$$

Im zweiten Falle werden beide Kegel Gleichungen von einer dieser Formen haben müssen, also bestimmt sein entweder durch

$$\frac{K^2 x^2}{1 - K^2 \sin^2\alpha} + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{\sin^2\alpha}$$

und $$\frac{K^2 x^2}{1 - K^2 \sin^2\beta} + \frac{y^2}{\cos^2\beta} = \frac{z^2}{\sin^2\beta};$$

oder $$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = \frac{K^2 z^2}{1 - K^2 \sin^2\alpha}$$

und $$\frac{x^2}{\sin^2\beta} - \frac{y^2}{\cos^2\beta} = \frac{K^2 z^2}{1 - K^2 \sin^2\beta}$$

welche Systeme von Gleichungen sich nur dadurch von einander unterscheiden, daß die x mit der y Axe vertauscht ist.

§. 19. Das Stück soll bestimmt werden, daß von 4 sphärischen Ellipsen begränzt wird, und zwar nur durch elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung. Es sind hier wieder 2 Fälle zu unterscheiden, nämlich:

1) wenn je 2 und 2 denselben Mittelpunkt haben, die Mittelpunkte aber um $\frac{\pi}{2}$ von einander entfernt liegen und
2) wenn alle 4 denselben Mittelpunkt haben.

Sind die Gleichungen der den 4 sphärischen Ellipsen zugehörigen Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a_,^2} + \frac{y^2}{b_,^2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2_2} - \frac{a^2}{b^2_2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2_3} - \frac{y^2}{b^2_3} = z^2,$$

so sind die Gleichungen der schon früher angedeuteten Projectionen:

$$\frac{x^2 (1 + a^2)}{a^2} + \frac{y^2 (1 + b^2)}{b^2} = 1.$$

$$\frac{x^2 (1 + a_,^2)}{a_,^2} + \frac{y^2 (1 + b_,^2)}{b_,^2} = 1$$

$$\frac{x^2 (1 + a^2_2)}{a^2_2} - \frac{y^2 (1 + b^2_2)}{b^2_2} = 1$$

$$\frac{x^2 (1 + a^2_3)}{a^2_3} - \frac{y^2 (1 + b^2_3)}{b^2_3} = 1.$$

Construire ich mir nun wieder mit den Coordinaten einer Ellipse und einer Hyperbel, die dieselben Axen **A** und **B** haben, als Axen resp. Hyperbeln und Ellipsen, so werde ich auf diese Weise die Projection des auf diese Weise zu bestimmenden Stücks in Elemente theilen, die

von Hyperbeln und Ellipsen begränzt werden. Da aber die Projectionen der 4 sphärischen Ellipsen, von denen 2 Ellipsen und 2 Hyperbeln sind, auch zu diesen Systeme gehören, so muß ich die Axen A und B der beiden Hilfscurven so bestimmen, daß für die Abscissen der Ellipse

$$x = \frac{a_2}{\sqrt{1 + a^2_2}} \text{ und } x = \frac{a_3}{\sqrt{1 + a^2_3}}$$

die Ordinaten

$$= \frac{b_2}{\sqrt{1 - b^2}} \text{ und } = \frac{b_3}{\sqrt{1 - b^2_3}},$$

und für die Abscissen

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ und } x = \frac{a_,}{\sqrt{1 + a_,^2}}$$

die Ordinaten

$$= \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} \text{ und } y = \frac{b_,}{\sqrt{1 + b_,^2}}$$

werden. Ich erhalte auf diese Weise zur Bestimmung der beiden Größen A und B 4 Gleichungen, weshalb zwischen den 8 Axen noch 2 Relationen stattfinden müssen. Diese werde ich jedoch erst nach Aufstellung der zwischen A und B noch stattfindenden Relation näher untersuchen. Ich setze nämlich jetzt wieder, um das für das zu bestimmende Stück geltende Doppelintegral

$$\iint \frac{d\,x\;d\,y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

umzuformen,

$$x^2 = [1 + B^2 - A^2 \sin{}^2\varphi]\,\frac{A^2}{B^2}\,\sin{}^2\psi$$

$$y = \cos\varphi\,\cos\psi,$$

wo φ und ψ die schon früher gegebene Deutung haben, und erhalte alsdann:

$$\iint \frac{d\varphi\;d\psi\;\sin\varphi\;[A^2\cos{}^2\varphi + A^2\,B^2\cos{}^2\psi]}{\sqrt{A^2\,B^2 + A^2\cos{}^2\varphi}\;\sqrt{B^2\sin{}^2\psi - (A^2 - B^2)\cos{}^2\varphi\,\sin{}^2\psi - A^2\,B^2\sin{}^2\psi}},$$

welches Doppelintegral ich nur dann auf elliptische Funktionen erster und zweiter Gattung zurückführen kann, wenn

$$B^2 = \frac{A^2}{1 - A^2}$$

ist. Füge ich zu dieser Bedingungsgleichung nun die 4 vorerwähnten Gleichungen, denen der Werth von A und B genügen muß, nämlich:

$$\frac{a^2}{(1 + a^2)\,A^2} - \frac{b^2}{(1 + b^2)\,B^2} = 1$$

$$\frac{a_,^2}{(1 + a_,^2)\,A^2} - \frac{b_,^2}{(1 + b_,^2)\,B^2} = 1$$

$$\frac{a^2_2}{(1+a^2_2)\,A^2} + \frac{b^2_2}{(1-b^2_2)\,B^2} = 1$$

$$\frac{a^2_3}{(1+a^2_3)\,A^2} + \frac{b^2_3}{(1-b^2_3)\,B^2} = 1$$

hinzu, so geht aus diesen 5 Gleichungen außer der Bestimmung von A und B noch die Bestimmung dreier anderer Größen hervor, als welche ich $b,$, b_2 und b_3 nehmen werde. Dann erhalte ich

$$A^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}$$

$$B^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + b^2}$$

$$b,^2 = \frac{a,^2 - a^2 + b^2\,(1 + a,^2)}{1 + a^2}$$

$$b^2_2 = \frac{a^2 - a^2_2 - b^2\,(1 + a^2_2)}{1 + a^2}$$

$$b^2_3 = \frac{a^2 - a^2_3 - b^2\,(1 + a^2_3)}{1 + a^2};$$

oder, wenn ich

$$a = \operatorname{tg}\alpha \quad a, = \operatorname{tg}\alpha, \quad a_2 = \operatorname{sg}\alpha_2 \quad a_3 = \operatorname{tg}\alpha_3$$

$$b = \operatorname{tg}\beta \quad b, = \operatorname{tg}\beta, \quad b_2 = \operatorname{tg}\beta_2 \quad b_3 = \operatorname{tg}\beta_3$$

setze und berücksichtige, daß

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos e$$

ist, wo e die Excentricität der sphärischen Ellipse ist, deren Axen α und β sind, so wird

$$A = \sin e$$

$$B = \operatorname{tg} e$$

$$b,^2 = \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2\alpha, - \operatorname{tg}^2 e] = \operatorname{tg}^2\beta,$$

$$b^2_2 = \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2 e - \operatorname{tg}^2\alpha_2] = \operatorname{tg}^2\beta_2$$

$$b^2_3 = \cos^2 e\,[\operatorname{tg}^2 e - \operatorname{tg}^2\alpha_3] = \operatorname{tg}^2\beta_3.$$

Hieraus folgt, daß die Excentricität der sphärischen Ellipse mit den Axen $\alpha,$ und $\beta,$ e, die Excentricitäten der sphärischen Ellipsen mit den Axen α_2 und β_2 und α_3 und β_3 $90 - e$ ist; die Excentricitäten der Ellipsen also mit demselben Mittelpunkt einander gleich sind, jedoch die Excentricitäten der Ellipsen der beiden Paare sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen. Ferner folgt aus den für $\beta,$ β_2 β_3 aufgestellten Werthen, daß $\alpha, > e$, α_2 und $\alpha_3 < e$ sein müssen, und endlich, da für $\alpha, = e$, $\beta, = o$, für $\alpha, = \alpha$, $\beta, = \beta$ wird, daß die beiden sphärischen Ellipsen mit den Axen α und β, und $\alpha,$ und $\beta,$ sich nie schneiden werden, was auch der Fall ist bei den mit den Axen α_2 und β_2, α_3 und β_3 beschriebenen sphärischen Ellipsen, denn β_2 nimmt continuirlich von β_2 bis β_3 ab, während die große Axe von α_2 bis α_3 wächst.

Unter diesen Bedingungen wird nun obiges Doppelintegral werden:

$$= \iint \frac{d\varphi\, d\psi\, [1 - \cos^2 e \sin^2\varphi - \sin^2 e \sin^2\psi]}{\sqrt{1 - \cos^2 e \sin^2\varphi}\ \sqrt{1 - \sin^2 e \sin^2\psi}}.$$

Da die kleinen Axen $\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ und $\frac{b_{,}}{\sqrt{1 + b_{,}^2}}$ der beiden um den ersten Mittelpunkt liegenden Ellipsen, von denen die Projection des zu bestimmenden Stücks begränzt wird, Ordinaten der Hilfshyperbel sind, ich aber für diese Ordinaten allgemein $\cos\varphi$ substituirt habe, so ist das Integral in Bezug auf φ zu nehmen von $\varphi = \text{arc}\sin = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$ d. h $\frac{\pi}{2} - \beta$ bis $\text{arc}\cos = \frac{b_{,}}{\sqrt{1 + b_{,}^2}}$ d. h. $\text{arc}\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}$. In Bezug auf ψ ist es zu nehmen von dem Werthe von ψ, der der Abscisse des Durchschnittspunkts der einen Ellipse und Hyperbel entspricht, bis zu dem Werthe von ψ, der der Abscisse des Durchschnittspunkts der andern Ellipse und Hyperbel entspricht; also von $\text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_3}{\sin e}$ bis $\text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_2}{\sin e}$. Folglich erhalte ich nach Substitution dieser Grenzen:

$$f = \left[F\left(\cos e, \tfrac{\pi}{2} - \beta\right) - F\left(\cos e, \text{arc}\sin = \tfrac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\right]\left[E\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right) - E\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_3}{\sin e}\right)\right]$$
$$+ \left[E\left(\cos e, \tfrac{\pi}{2} - \beta\right) - E\left(\cos e, \text{arc}\sin = \tfrac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\right]\left[F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right) - F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_3}{\sin e}\right)\right]$$
$$- \left[F\left(\cos e, \tfrac{\pi}{2} - \beta\right) - F\left(\cos e, \text{arc}\sin = \tfrac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\right]\left[F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right) - F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_3}{\sin e}\right)\right],$$

welcher Ausdruck noch mit 8 multiplicirt werden muß, da die Kegel sich nach beiden Seiten erstrecken. Derselbe muß in den im §. 14 angegebenen übergehen, wenn ich $\alpha_{,} \mp \alpha_3 = e$ setze, denn alsdann fällt die eine Ellipse und eine Hyperbel zusammen in eine Linie, da alsdann $\beta_{,}$ und $\beta_3 = o$ werden; endlich werden in diesem Falle $\text{arc}\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}$ und $\text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_3}{\sin e} = \frac{\pi}{2}$, folglich wie in §. 14,

$$F = 8\left[F^{I}\cos e - F\left(\cos e, \tfrac{\pi}{2} - \beta\right)\right]\left[E^{I}\sin e - E\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right)\right]$$
$$+ 8\left[E^{I}\cos e - E\left(\cos e, \tfrac{\pi}{2} - \beta\right)\right]\left[F^{I}\sin e - F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \tfrac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right)\right]$$

$$-8\left[F^{I}\cos e - F\left(\cos e, \frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]\left[F^{I}\sin e - F\left(\sin e, \text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_2}{\sin e}\right)\right].$$

Er muß ferner die Differenz des Inhalts der beiden um den Mittelpunkt **F** liegenden sphärischen Ellipsen darstellen, wenn ich $\alpha_3 = o$ und $\alpha_2 = e$ setze, denn alsdann fallen die beiden Hyperbeln mit einer Linie zusammen, und das zu bestimmende Stück ist das von 2 um denselben Mittelpunkt liegenden sphärischen Ellipsen begränzte. Dieser Fall tritt auch wirklich ein, denn alsdann wird $\text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_3}{\sin e} = o$ und $\text{arc}\sin = \frac{\sin\alpha_2}{\sin e} = \frac{\pi}{2}$, folglich

$$F = 8\left[F\left(\cos e, \frac{\pi}{2}-\beta\right) - F\cos e, \text{arc}\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\Big] E^{I}\sin e$$

$$+ 8\left[E\left(\cos e, \frac{\pi}{2}-\beta\right) - E\left(\cos e, \text{arc}\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\right] F^{I}\sin e$$

$$- 8\left[F\left(\cos e, \frac{\pi}{2}-\beta\right) - F\left(\cos e, \text{arc}\sin = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos e}\right)\right] F^{I}\sin e.$$

§. 20. Ich gehe jetzt zur Betrachtung des Falles über, in dem die sphärischen Ellipsen denselben Mittelpunkt haben. Die Gleichungen der 4 Kegel sind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a_{,}^2} + \frac{y^2}{b_{,}^2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2_2} + \frac{y^2}{b^2_2} = z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2_3} + \frac{y^2}{b^2_3} = z^2,$$

folglich die Gleichungen der Projectionen der sphärischen Ellipsen:

$$1.\quad \frac{x^2(1+a^2)}{a^2} + \frac{y^2(1+b^2)}{b^2} = 1$$

$$2.\quad \frac{x^2(1+a_{,}^2)}{a_{,}^2} + \frac{y^2(1+b_{,}^2)}{b_{,}^2} = 1$$

$$3.\quad \frac{x^2(1+a^2_2)}{a^2_2} + \frac{y^2(1+b^2_2}{b^2_2} = 1$$

$$4.\quad \frac{x^2(1+a^2_3)}{a^2_3} + \frac{y^2(1+b^2_3)}{b^2_3} = 1.$$

Setze ich nun $b^2_2 = - b_{,}{}^2_2$ und $b^2_3 = - b_{,}{}^2_3$, so gehen die Gleichungen 3 und 4 über in

$$5.\quad \frac{x^2\ 1+a^2_2}{a^2_2} - \frac{y^2(1+b_{,}{}^2_2)}{b_{,}{}^2_2} = 1$$

$$6.\quad \frac{x^2\ 1 + a^2_3}{a^2_3} - \frac{y^2 (1 + b,^2_3)}{b,^2_3} = 1.$$

Die Gleichungen 1, 2, 5 und 6 sind dieselben mit denen, die ich für die Projectionen der sphärischen Ellipsen erhielt, von denen immer nur 2 denselben Mittelpunkt hatten, und welche Mittelpunkte um $\frac{\pi}{2}$ von einander entfernt sind. Behandle ich diese Gleichungen wie jene, so erhalte ich für $b,$, $b,_2$, $b,_3$ folgende Gleichungen:

$$b,^2 = \frac{a,^2 - a^2 + b^2 (1 + a,^2)}{1 + a^2}$$

$$b,^2_2 = \frac{a^2 - a^2_2 - b^2 (1 + a^2_2)}{1 + a^2}$$

$$b,^2_3 = \frac{a^2 - a^2_3 - b^2 (1 + a^2_3)}{1 + a^2},$$

oder, da $b^2_2 = - b,^2_2$ und $b^2_3 = - b,^2_3$ war,

$$b^2_2 = \frac{a^2 - a^2_2 - b^2 (1 + a^2_2)}{1 + a^2}$$

$$b^2_3 = \frac{a^2_3 - a^2 + b^2 (1 + e^2_3)}{1 + a^2};$$

und endlich, da diese Linien immer gleich der Tangente des ihnen entsprechenden Winkels sind, und $\cos e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ ist,

$$tg\ ^2\beta, = \cos\ ^2e\ (tg\ ^2\alpha, - tg\ ^2e)$$

$$tg\ ^2\beta_2 = \cos\ ^2e\ (tg\ ^2\alpha_2 - tg\ ^2e)$$

$$tg\ ^2\beta_3 = \cos\ ^2e\ (tg\ ^2\alpha_3 - tg\ ^2e).$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun, daß α, α_2 und $\alpha_3 > e$ sein müssen, allen sphärischen Ellipsen dieselbe Excentricität zugehören muß, hauptsächlich aber, daß keine von ihnen die andere schneiden darf, da β_3 bis β_2 bis $\beta,$ bis β wächst, während α_3 bis α_2 bis $\alpha,$ bis α zunimmt. Die Grenzen in dem mehrfach angeführten Doppelintegral werden sein für φ von $\frac{\pi}{2}$ bis arc cos = der kleinen Axe der kleinsten sphärischen Ellipse, d. h. arc sin $= \frac{\cos \alpha_3}{\cos e}$; für ψ aber von $\frac{\pi}{2}$ bis o, so daß also

$$F = 4\pi - 8\ [E^I \sin e - F^I \sin e]\ F\left(\cos e,\ erc \sin = \frac{\cos \alpha_3}{\cos e}\right)$$

$$+ 8\ F^I \sin e\ E\left(\cos e,\ arc \sin = \frac{\cos \alpha_3}{\cos e}\right)$$

ist, welches der Inhalt der kleinsten sphärischen Ellipse ist. Auf dieses Resultat mußte ich auch kommen, da nach den obigen Bedingungen die Ellipsen sich nicht schneiden durften, sondern in einander liegen sollten; das ihnen gemeinschaftliche Stück also die kleinste von ihnen ist.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

Ordinarien waren in I Professor Klupß, in II Professor Kühnast, in III, A Professor Brillowski, in III, B Dr. Waas, in IV Oberlehrer Claussen, in V Gymnasiallehrer Fabricius, in VI Gymnasiallehrer Jänsch.

Vorgetragene Lehrgegenstände.

Der Unterricht ist in dem verflossenen Jahre ganz in derselben Weise ertheilt worden, wie in dem zunächst vorhergehenden; es wird daher zur Vermeidung von Wiederholungen gestattet sein, auf den vorjährigen Bericht Bezug zu nehmen und die Pensa nur da besonders anzugeben, wo der zweijährige Cursus eintritt, und die zweite Hälfte desselben zum Vortrag gekommen ist.

1. Deutsch.

Cl. II. Bei der Literaturgeschichte wurden Proben aus Wackernagel mitgetheilt; gelesen und erläutert wurden Göthes Tasso und Klopstocks Oden.

Cl I. Die Literaturgeschichte wurde beendet durch Vorträge über den 7. Zeitraum; daneben wurden die Hauptwerke der bedeutendsten Schriftsteller gelesen und besprochen.

2. Lateinisch.

Cl. II. Liv. III, Cic. pro Rosc. Amer. und pro leg. manil.; Aen. III und IV. Daneben privatim Sall. Cat. und Jug.

Cl. I. Tacit. hist. II, Cic. Brut. und de fin. I und III; Horat. od. III und IV. Privatim Cic. Tuscul. V und de fin. II.

3*

3. Griechisch.

Cl. II. Plut. Themist. und Pericles; Odyss. XIII — XXIV, theils in der Klasse, theils privatim.

Cl. I. Isocrat. Panegyr. und Plat. Charmides und Menexen.; Il. XIII — XXIV, theils in der Klasse, theils privatim. In der Gammatik Lehre von den Modis und den Partikeln.

4. Französisch.

Cl. II. Mignet révolut. francaise chap. III und IV.

Cl. I. Ségur XI und XII und Louis XI par Delavigne.

5. Religion.

Cl. II. Geschichte der Kirche von der Reformation bis zur neuesten Zeit; Einleitung in die Bibel. Lectüre der Apostelgeschichte und der Briefe an die Thessalonicher.

Cl. I. Lehre von der Kirche und Symbolik; christliche Moral. Lectüre der Briefe an die Galater, Epheser, Kolosser und des 1. Briefes an die Korinther.

6. Propädeutik zur Philosophie.

Cl. I. Logik.

7. Mathematik.

Cl. I. Stereometrie, Zahlentheorie und Kettenbrüche; Anwendung der Trigonometrie, besonders auf stereometrische Aufgaben; binomischer Lehrsatz und Entwicklung der Logarithmen und Kreisfunctionen in Reihen.

8. Geschichte.

Cl. II. Rom unter den Kaisern und Geschichte des Mittelalters bis zur Reformation.

Cl. I. Neuere Geschichte von 1740 — 1815.

9. Naturkunde.

Cl. II. Zoologie und Botanik.

Cl. I. Lehre von der Wärme, Electricität, dem Magnetismus und Galvanismus; mathematische und physische Geographie.

Die Turnübungen leitete während des Sommers Fabricius in 4wöchentlichen Stunden.

Wie die einzelnen Gegenstände unter die Lehrer vertheilt gewesen sind, geht aus der nachfolgenden Tabelle hervor:

Namen der Lehrer.	Cl. I.	Cl. II.	Cl. III, A.	Cl. III, B.	Cl. IV.	Cl. V.	Cl. VI.	Summe der wöchentlichen Stunden.
Techow.	2 Latein. 2 Griech.	2 Griech.	2 Griech. 4 Latein.					12.
Klupß.	4 Mathem. 2 Physik.		3 Mathem. 2 Physik.	3 Mathem.		4 Rechnen. 2 Naturgeschichte.		20.
Brillowski.	3 Geschichte und Geogr.	2 Gesch. 1 Geogr.	2 Religion. 4 Latein. 2 Gesch. 2 Geogr.	2 Gesch. 2 Geogr.				20.
Weyl.	2 Französ.	2 Französ.	2 Französ. 4 Griech.	2 Französ. 2 Naturgeschichte.	4 Griech. 2 Naturgeschichte.		2 Geogr.	22.
Kühnast.	4 Griech.	4 Griech. 8 Latein.		6 Griech.				22.
Claussen.	3 Deutsch. 2 Phil. Propädeutik. 6 Latein.				8 Latein.			19.
Jänsch.		4 Mathem. 2 Naturgeschichte.			3 Mathem.		8 Latein. 4 Rechnen. 2 Religion. 2 Naturg.	25.
Fabricius.	2 Religion.	2 Religion.	3 Deutsch.		2 Religion. 2 Geogr. 2 Gesch.	2 Religion 8 Latein.		23.

Waas.	2 Hebr.	2 Hebr. 3 Deutsch. 2 Latein.		8 Latein. 3 Deutsch.		3 Geogr.		23.
Thiem.					2 Zeichnen. 2 Französ.	2 Zeichnen. 3 Schreiben 2 Französ.	4 Schreiben 2 Zeichnen.	17.
Küsel.			2 Singen.		3 Deutsch. 2 Singen.	4 Deutsch. 2 Singen.	6 Deutsch.	19.

II. Verordnungen der vorgesetzten Königl. Behörden.

Vom 4. October 1852. Die mit einem Entlassungszeugniß versehenen Tertianer des Progymnasiums zu Hohenstein sind ohne Prüfung in die II aufzunehmen.

Vom 4. März 1853. Nach einer Verordnung des vorgesetzten Königl. Ministeriums sollen solche Abiturienten und auswärtige Maturitäts-Aspiranten, die sich bei der schriftlichen oder mündlichen Prüfung einer Täuschung schuldig machen oder andern dazu behülflich gewesen sind, sofort von der Prüfung ausgeschlossen und bis auf den nächsten Prüfungstermin zurückgewiesen werden.

Vom 14. März. Der Herr Minister für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten hat sich dahin ausgesprochen, daß Postaspiranten mit dem Zeußniß vollständiger Reife entlassen sein müssen; demnach sollen solchen jungen Leuten keine Zeugnisse der Reife nach der Bestimmung unter lit. C. §. 28 des Prüfungs-Reglements, sondern lediglich nach den für alle Examinanden geltenden Bestimmungen ausgestellt werden.

Vom 19. Mai. Die mit einem Entlassungszeugniß versehenen Secundaner des Progymnasiums zu Rößel sollen ohne Prüfung als Primaner aufgenommen werden.

Vom 10. August. Nach einer Ministerial-Bestimmung vom 1. August soll das Porst'sche Gesangbuch, wo es gebraucht wird, nur in der Jonas'schen Ausgabe zur Anwendung kommen.

III. Chronik der Lehranstalt.

A. Lehrerpersonal.

1. Bald nach dem Anfang des Schuljahres sind die in dem Lehrer-Collegium entstandenen Lücken ausgefüllt worden. Die 6te ordentliche Lehrerstelle, durch den Tod des Gymnasiallehrer

Losch erledigt, wurde durch Vocation vom 16. December dem Hülfslehrer Ernst Robert Jänsch verliehen, der bereits seit dem 1. Februar 1845 unserer Anstalt seine Thätigkeit mit dem besten Erfolge gewidmet hat. In die durch seine Beförderung erledigte Stelle wurde Herr Carl Otto Fabricius berufen, der, am 6. April 1823 zu Bladiau bei Heiligenbeil geboren, auf dem Fridericianum zu Königsberg vorgebildet, seine Studien auf der Universität zu Königsberg von 1841 — 1846 gemacht und das vorschriftsmäßige Examen pro facultate docendi zu Michaelis 1846 bestanden hat. Seitdem 5 Jahre an den Gymnasien zu Marienwerder und Tilsit beschäftigt, hat Herr Fabricius hier den Religionsunterricht in den beiden obersten Klassen neben andern Stunden übernommen und sich durch den Eifer und die Treue, mit denen er sein Amt verwaltet, bei Lehrern und Schülern bald Vertrauen und Zuneigung gewonnen. Die Thätigkeit des Dr. Waas, der schon seit dem 7. Juni v. J. aushelfend eingetreten war, verblieb der Anstalt und erhielt dadurch, daß ihm ein Ordinariat übertragen wurde, noch größere und eingreifendere Wirksamkeit.

So ist dem Gymnasium die volle Lehrkraft wiedergegeben und durch den göttlichen Beistand bisher ungeschwächt erhalten worden. Weniger Erfreuliches läßt sich von dem Gesundheitszustand der Schüler während des verflossenen Jahres sagen. Schon im Herbst erkrankten mehrere sehr bedeutend am Nervenfieber; einen Secundaner forderte der Tod von uns ab, nachdem er, unlängst zu uns gekommen, durch seinen stillen und ausdauernden Fleiß sich unser Vertrauen gewonnen hatte. Aber übler wurde es noch im Frühjahr, als die Masern und das kalte Fieber hier allgemein herrschten und auch von unsern Schülern sehr viele ergriffen. Indessen haben wir doch keine Verluste zu beklagen und auch bei dieser Gelegenheit wieder der unermüdeten und uneigennützigen Thätigkeit unserer Aerzte, besonders des Königl. Kreisphysikus Herrn Dr. Schütz und des Herrn Dr. v. Staßewski, viel zu danken gehabt.

2. Wie früher, ist die wohlwollende Fürsorge der vorgesetzten Königl. Behörden auch in diesem Jahre bemüht gewesen, den schlechter dotirten Stellen Unterstützungen zuzuweisen. Für die Wittwe unsers früh verstorbenen Losch wurden nicht unerhebliche Bewilligungen gemacht, um sie namentlich in dem ersten Jahre, vor dem Fälligkeitstermin ihrer Pension, vor Sorgen zu schützen. Aus dem Centralfonds für die Gymnasien empfingen 3 Lehrer Zuschüsse, und zu demselben Zweck wurde auch eine entsprechende Summe aus den eigenen Mitteln der Anstalt verwandt.

B. Lehrapparat.

1. Der Gymnasial-Bibliothek wurden außer den Fortsetzungen der Zeitschrift für deutsches Alterthum und der neuen Preuß. Provinzialblätter manche Geschenke zu Theil. Zuerst erhielten wir durch das Königl. Ministerium 9 Werke aus einem zur Auswahl gestellten Büchervorrath, die von Dr. Scheibel herausgegebenen Olympiades Scaligeri und eine Sammlung von Abhandlungen des verstorbenen Dr. Hoffmann im Gebiet der Staatswissen-

schaft, den 2. Theil der Literaturgeschichte von Pisanski und das Rheinische Museum für Philologie Band VIII, Heft 1 — 4. Sodann verdanken wir dem Curatorium der allgemeinen Landesstiftung zur Unterstützung hülfsbedürftiger Veteranen als Nationaldank 4 Exemplare des Gedenkbuches zur Vertheilung an fleißige Schüler; endlich haben der Herr Director Gotthold zu Königsberg und der Herr Musikdirector Commer zu Berlin mehrere werthvolle Schriften geschenkt. Allen diesen freundlichen Gebern sagt die Anstalt, deren Büchersammlung aus den etatsmäßigen Mitteln nur langsam vermehrt werden kann, den verbindlichsten Dank.

2. Eine Sammlung ausgestopfter Vögel, die von dem Besitzer zu einem sehr billigen, nur die baaren Auslagen erstattenden Preise zur Verfügung gestellt war, konnte aus den Ersparnissen der Anstalt angeschafft und zur Belebung des naturgeschichtlichen Unterrichts aufgestellt werden.

3. Die Lehrer- und Schul-Bibliothek erhielten wieder einigen Zuwuchs. Auch wurden mehrere Wandcharten angeschafft, so daß nun das Ziel, jeder Klasse ihren Bedarf nach der Vertheilung der Pensen zuzuweisen, bald erreicht sein wird.

4. Mit besonderem Danke ist eines Geschenkes zu erwähnen, das zur Belebung des Gesang-Unterrichts und zur Hebung der Feierlichkeit bei den gemeinsamen Andachten und Schulfestlichkeiten noch lange segensreich wirken wird. Durch die gütige Vermittelung des Königl. Provinzial-Schulkollegiums hat nämlich des Herrn Ministers v. Raumer Excellenz unter dem 10. Septbr. v. J. 300 Rthlr. zur Anschaffung eines Flügels bewilligt. Unter Mitwirkung des Herrn M. D. Sämann in Königsberg ist für diesen Preis ein Instrument gewonnen und in der Aula zur Benutzung aufgestellt, das durch seine schöne äußere Ausstattung zur Zierde des Saales gereicht und durch die Fülle und Kraft seines Tones, wie durch seine feste und dauerhafte Bauart den Beifall aller Kenner erhält. So wird es hoffentlich noch lange mit Vortheil benutzt werden und zugleich ein Zeugniß ablegen von der Geneigtheit der vorgesetzten Behörden, die vaterländischen Schulanstalten in ihren Bestrebungen zu unterstützen. Dieselbe Erfahrung haben wir auch nach einer andern Seite hin gemacht. Die Beschränktheit des Turnplatzes war schon oft bei der Ertheilung des Unterrichts hinderlich geworden. Des Herrn Oberpäsidenten Eichmann Excellenz entging dieser Uebelstand bei dem Besuche, dessen wir uns am 24. Mai v. J. zu erfreuen hatten, nicht, und so wurde durch den in diesem Frühjahr befohlenen Ankauf des benachbarten Gartengrundstücks (Rastenburg № 502) nicht allein der bisherige Turnplatz um mehr, als das Doppelte vergrößert, sondern auch der Directorwohnung ein Garten zugewiesen, der ihr bis dahin gefehlt hatte. Mit neuem Eifer haben nun auf dem erweiterten und mit zahlreicheren Geräthen ausgestatteten Turnplatz die Uebungen begonnen, und das Schauturnen, das am 31. August vor einer zahlreichen Versammlung abgehalten wurde, hat den Beweis geliefert, wie sehr die Schüler bemüht gewesen sind, die ihnen durch die Fürsorge der vorgesetzten Behörden dargebotene, vielfach verbesserte Gelegenheit zur Gewinnung körperlicher Gewandtheit zu benutzen.

5. Die von dem Curatorium der allgemeinen Landesstiftung zur Unterstützung hülfsbedürftiger Veteranen der hiesigen Anstalt unentgeltlich überwiesenen 4 Gedenkbücher (siehe № 1.) wurden am 27. August 4 Schülern, Davidsohn, Schrempf, Rippa und Pohl, deren Väter in dem Befreiungskriege mitgekämpft haben, nach dem Gebet vom Director feierlich übergeben.

6. Schon in einem früheren Bericht (1851) wurde Bedauern darüber ausgesprochen, daß es noch nicht hatte gelingen wollen, eine Schwimmanstalt zu errichten und für eine geordnete Badegelegenheit zu sorgen. Der Director ist sehr erfreut, daß durch die freundliche Unterstützung der städtischen Behörden und vieler Einzelnen dies nunmehr möglich geworden ist. Der Mühlenbesitzer Herr Kolmar gestattete nämlich in diesem Frühjahr mit gewohnter Bereitwilligkeit die Benutzung seiner Schleusenanlage; die städtischen Behörden bewilligten das nöthige Bauholz; der Herr Baron v. d. Trenck und der Herr Major Steppuhn gaben die erforderliche Uferfläche mit der dankenswerthesten Zuvorkommenheit her, und so konnte am 6. Juni, nachdem ein Schwimmlehrer aus Königsberg engagirt war, die wohl eingerichtete Schwimmanstalt eröffnet werden. Von 90 Lernenden ist fast die Hälfte im Laufe des Sommers zu Freischwimmern ausgebildet, und vielen andern ist die Wohlthat und Erfrischung eines täglichen Bades zu Theil geworden. Durch die umsichtige Unterstützung mehrerer bewährten Freunde des Gymnasiums, der Herren v. Massenbach, v. Sanden, v. Poussardière, Stadtkämmerer Kösling, Jork, und des Gymnasiallehrer Jänsch ist jeder Unfall vermieden, und das ganze Unternehmen zu dem erwünschtesten Erfolge geleitet worden. Allen aber, die durch wohlwollende Theilnahme und bereitwilliges Entgegenkommen die Sache gefördert haben, auch öffentlich seinen verbindlichsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen, das ist eine Pflicht, deren Erfüllung dem unterzeichneten Director ein tief empfundenes Bedürfniß ist.

C. Unterstützungsfonds.

1. Königl. Stipendien erhielten 20 Schüler der oberen Klassen im Betrage von 10 — 20 Rthlr.
2. Das Krügersche Stipendium ist leider noch immer nicht zur Hebung gelangt, da ihm außerordentliche Einnahmen nicht zufließen, und die Ansammlung der Zinsen nur langsam dahin führt, das Stiftungskapital zu der bestimmten Höhe zu bringen. Es beträgt jetzt 175 Rthlr. in Staatsschuldscheinen und 20 Rthlr. 6 Sgr. 1 Pf. bei der hiesigen Sparkasse.
3. Mit Schulbüchern sind auch im verflossenen Jahr mehrere Schüler aus den etatsmäßigen Mitteln unterstützt worden. Außerdem wird Herr Buchhändler Röhricht nicht müde, in dieser Beziehung sein Wohlwollen zu bethätigen, und ein Freund der Anstalt, der nicht genannt sein will, hat eine Sammlung von 9 sehr gut erhaltenen und brauchbaren Schulbüchern zu diesem Zweck überwiesen; beiden Herren dankt der Direktor im Namen der durch sie Unterstützten.

D. Abiturienten.

Zu Michaelis 1852 verließ die Anstalt mit dem Zeugniß der Reife:

Friedrich Rudolph Preuß, evangelisch, 18½ J. alt, aus Ortelsburg, Sohn des dortigen Kreis-Gerichts-Rendanten, 6½ J. auf dem Gymnasium, 2½ J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.

Zu Ostern 1853 wurden mit dem Zeugniß der Reife entlassen:

1. Heinrich August Adolph Billerbeck, evangelisch, 18½ J. alt, aus Rastenburg, Sohn des hiesigen Majors a. D., 8½ J. auf dem Gymnasium, 2½ J. in Prima, studirt in Königsberg und Bonn Philosophie.
2. Friedrich Ernst Carl Penski, evangelisch, 19½ J. alt, aus Rastenburg, Sohn des hiesigen Kreisgerichts-Secretairs, 10½ J. auf dem Gymnasium, 2½ J. in Prima, studirt in Königsberg Theologie.
3. Friedrich Rudolph Albert Rübsamen, evangelisch, 20 J. alt, aus Domnau, Sohn des Pfarrers zu Rössel, 2½ J. auf dem Gymnasium und in Prima, studirt in Königsberg Theologie.
4. Friedrich Wilhelm v. Groddeck, evangelisch, 20 J. alt, aus Masurhöfchen bei Nordenburg, Sohn des verstorbenen dortigen Gutsbesitzers, 6½ J. auf dem Gymnasium und 2 J. in Prima, studirt in Königsberg Jura.

Außerdem erhielt zu Ostern das Zeugniß der Reife ein Etraneus, Vincenz Mannich, katholisch, 22½ J. alt, aus Rössel, Sohn eines dortigen Schneidermeisters; er wird in Königsberg Jura studiren.

E. Schulfeierlichkeiten.

1. Am 15. October wurde der Geburtstag Sr. Majestät des Königs festlich begangen. Die Festrede hielt der Gymnasiallehrer Jänsch. Er sprach über die sittliche Bedeutung Preußens in Deutschland; es eröffneten und schlossen die patriotische Feier Gesänge der Schüler unter Leitung des Cantor Küsel. Die Büste Sr. Majestät war dem festlichen Tage gemäß mit Blumen geschmückt und vergegenwärtigte den zahlreich Versammelten die Züge des gütigen Fürsten.
2. Am Charfreitag hielt gemäß der Hippelschen Stiftung der Director einen Vortrag über die Bedeutung der Worte des Erlösers: „es ist vollbracht." Angemessene Gedichte wurden durch den Primaner Majewski und den Secundaner Techow vorgetragen; die damit verbundene Musikaufführung leitete der Cantor Küsel.
3. Am 22. März wurden die Abiturienten feierlich durch den Director entlassen. Einer von ihnen, Billerbeck, nahm mit einem Vortrage über die Bedeutung der Astronomie als einer Führerinn zur Gottesfurcht in seinem und der übrigen Namen von der Anstalt und den bisherigen Mitschülern Abschied. Die Wünsche der Zurückbleibenden schloß der Primaner Kaminski an einen französischen Vortrag über das Thema le développement

de la poésie française dans le siècle de Louis XIV an. Vorher hatten auch aus den andern Klassen einzelne Schüler sich mit den Vorträgen von Declamationsstücken versucht.

4. Der Hippelsche Schulactus wurde dies Mal, da der 19. Mai in die Pfingstferien fiel, auf den 2. Juni verlegt. Nachdem der Primaner Thomaschewski über den Einfluß des wissenschaftlichen Zustandes auf die Literatur eines Volkes gesprochen, und 16 Schüler aus den verschiedenen Klassen declamirt hatten, hielt der Gymnasiallehrer Jänsch zum Schluß einen Vortrag über die Verdienste Preußens um die Handelseinigung Deutschlands. Gesänge der 3 Singklassen wurden unter Leitung des Cantor Küsel ausgeführt.
5. Am 12. Juni gingen die Lehrer mit den eingesegneten Schülern zum heiligen Abendmahl.

IV. Uebersicht der statistischen Verhältnisse.

Am Schluß des Sommersemesters besuchten das Gymnasium

in I 35
in II 50
in III 63
in IV 47
in V 31
in VI 30

256 Schüler.

Die öffentliche Prüfung der sämmtlichen Klassen findet den 30. September Vormittags von 8½ — 12 Uhr Statt, und Nachmittags wird das Sommersemester mit Declamations- und Gesangübungen geschlossen.

Das Wintersemester beginnt Dienstag, den 11. October.

Zur Aufnahme neuer Schüler ist der Unterzeichnete täglich bereit.

Techow.

Reihenfolge der Prüfung und der Declamationsübung.

Vormittags 8½ Uhr:

Sexta: Geographie. Weyl.
Quinta: Rechnen. Klupß.
Quarta: Lateinisch. Claussen.
Tertia: Französisch. Weyl.
Secunda: Griechisch. Der Director.
Prima: Religion. Fabricius.

Nachmittags 2½ Uhr:

Gesang der 1. Singklasse.
Es declamiren:
Die Sextaner:
Kruschewski. Vertrauen v. Fröhlich.
Mäkelburg. Der junge Hase v. Pfeffel.
Bertram. Der Greis und der Tod v. Gleim.
Patzig. Erdenloos v. Fröhlich.

Gesang der dritten Singklasse.
Es declamiren:
Die Quintaner:
Kaminski. Der Alpenjäger v. Schiller.
Papendieck. Ibrahim v. Pfeffel.
Oertel. Der Hirt von Oggersheim v. Langbein.
Nawitzki. Die edle Musika v. Hagenbach.

Gesang der 3. Singklasse.
Es declamiren:
Die Quartaner:
Zimmermann. Schwäbische Kunde v. Uhland.
Braun. Das Wahrzeichen v. Freiligrath.
v. d. Trenck. Der gelehrige Bauer v. Pfeffel.
Glodkowski. Die Macht des Gesanges v. Schiller.

Gesang der 3. Singklasse.
Es declamiren:
Die Tertianer:
Pohl, Dittmar, Haberland II und Kühnast. Der Schatz v. Lessing.
Steppuhn, Ollech und Gudowius. Eine Scene des 1. Acts aus Götz v. Berlichingen.

Gesang der 2. Singklasse.
Es declamiren:
Die Secundaner:
v. Wrangel. Heinrich der Vogler v. Klopstock.
Hüllmann. Vaterlandslied v. Klopstock.

Rede des Primaners v. Hermann über Opitz.

Schlußgesang der 1. Singklasse.